

Estratto dal *Periodico di Matematiche*
Giugno-Ottobre 1963 - Serie IV, vol. XLI, n. 3-4 (pagg. 129-160)

CARLO FELICE MANARA

**Successioni ed equazioni
alle differenze finite**



NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA

Successioni ed equazioni alle differenze finite

1. - Nel presente articolo ci proponiamo di esporre alcune considerazioni sull'algoritmo delle successioni infinite, con l'intento di richiamare alcune analogie che questo algoritmo può presentare con altre teorie matematiche ed insieme di offrire alcuni spunti ed argomenti che possono formare oggetto di insegnamento nelle scuole medie superiori.

Notiamo invero che il concetto di successione infinita è il primo concetto di Matematica superiore che si incontra, in modo più o meno esplicito, nell'insegnamento della Matematica. Si pensi per es. alla successione degli interi, oppure al caso della «divisione che non finisce mai» che si presenta (anche in uno stadio di insegnamento molto elementare) quando si cerca di rappresentare in forma decimale un numero razionale corrispondente ad una frazione la quale, ridotta ai minimi termini, presenta al denominatore dei fattori diversi da quelli che entrano nella base di numerazione.

Si osservi inoltre che la successione infinita deve necessariamente essere usata per introdurre aritmeticamente il concetto di «numero reale»; e forse non è del tutto lontano dalla realtà il pensare che molte delle difficoltà che si presentano nell'insegnare tale concetto nella scuola media superiore sono dovute essenzialmente al carattere non elementare dell'algoritmo che deve essere usato per la introduzione di esso.

Le analogie e le illustrazioni che intendiamo offrire qui alla considerazione dei Lettori vogliono soprattutto indirizzarsi all'aspetto algebrico degli operatori che collegano il concetto di successione a quello di «equazione alle differenze finite», vogliono mettere in evidenza il parallelismo che intercede tra queste equazioni e le equazioni differenziali classiche dell'Analisi matematica ed infine offrire delle applicazioni alla Economia,

al Calcolo numerico che possono anche servire come utili esempi di applicazioni di metodi della Geometria analitica e in generale della discussione dei problemi con mezzi grafici.

2. - Il concetto di « successione infinita » viene abitualmente fatto coincidere con quello di « funzione (a valori reali) definita sull'insieme dei numeri interi ». Talvolta addirittura si usa la notazione $f(n)$ (essendo n un intero) per indicare il termine n -esimo della successione; non vi è nessuna difficoltà a che la funzione $f(n)$ sia la restrizione di una funzione $f(x)$ definita per ogni valore reale positivo della variabile x . È questo il caso abituale delle successioni di numeri razionali che sono dati dalle Tavole numeriche, il cui uso è insegnato anche nelle scuole dell'ordine secondario. In molti casi invero tali Tavole forniscono delle successioni di numeri razionali che approssimano, a meno di un errore prestabilito, i valori che una determinata funzione (definita per ogni valore reale positivo della variabile) assume in corrispondenza a valori interi della variabile.

In relazione all'uso delle Tavole il formalismo delle differenze finite che esporremo è abitualmente impiegato per risolvere il problema della « interpolazione ».

Come è noto, in questo ordine di idee la operazione di « interpolazione » consiste nello stimare il valore di una funzione $f(x)$ di cui si possiede una tavola in corrispondenza ad un valore della variabile che non compare tra quelli di « entrata » nella tavola, ma abitualmente è compreso tra due valori cosiffatti.

Noi non ci occuperemo qui di questo problema, per la risoluzione del quale rimandiamo alla letteratura specializzata in proposito ⁽¹⁾.

In tutto il presente articolo useremo una lettera con un suffisso numerico in basso a destra — per es. y_n — per indicare il termine generico di una successione ed useremo la notazione $\{y_n\}$ per indicare la successione il cui elemento n -esimo è y_n .

(1) Cfr. Per es. U. CASSINA, *Approssimazioni numeriche*. Art. LII della « Enciclopedia delle Matematiche elementari » Vol. III (Milano, 1954). Cfr. anche J. F. STEFFENSEN, *Interpolation* (Baltimora 1927). Si noti anche che quasi tutte le opere che trattano di differenze finite (e che citeremo nel corso di questo articolo) trattano del problema della interpolazione sulle tavole numeriche, che rappresenta una applicazione dell'algoritmo.

Data una successione $\{y_n\}$ è possibile costruirne una seconda, chiamata « successione delle differenze prime », i cui elementi si indicano con il simbolo Δy_n , e sono dati dalla relazione fondamentale di definizione

$$(1) \quad \Delta y_n = y_{n+1} - y_n \cdot \quad (2)$$

A proposito della (1) ora scritta si può osservare che il simbolo Δ appare come un operatore che fa corrispondere all'elemento y_n della successione originaria l'elemento Δy_n della successione delle differenze prime.

Di questo simbolo e di altri che introdurremo e che sono strettamente connessi con lui richiameremo qui alcune note proprietà formali, che ci sembra interessante ricordare perchè sono atte a fondare un « calcolo » che può fornire un utile ed elementare esempio di « operazioni » analoghe a quelle che si eseguono sui numeri ⁽³⁾.

Il secondo simbolo che introdurremo sarà indicato con E e definito dalla relazione

$$(2) \quad E y_n = y_{n+1} \cdot$$

Nell'ordine di idee che abbiamo esposto poco fa, il simbolo E appare dunque come un simbolo di operazione, che fa corrispondere all'elemento y_n della successione $\{y_n\}$ data l'elemento successivo, della successione stessa.

(2) Spesso nelle Tavole numeriche i valori dei termini della successione delle differenze prime sono stampati accanto a quelli della successione dei valori della funzione, per facilitare i calcoli di interpolazione.

(3) Le proprietà formali che richiameremo sono trattate in tutte le opere che riguardano l'algoritmo delle differenze finite; ne diamo qui un elenco esemplificativo, senza alcuna pretesa di completezza; D. SELIWANOFF, *Lehrbuch der Differenzenrechnung* (Lipsia, 1904); A. A. MARKOFF, *Differenzenrechnung* (Lipsia, 1904); C. JORDAN, *Calculus of finite Differences* (New York, 1950); L. M. MILNE-THOMPSON, *The calculus of finite Differences* (Lipsia, 1924); N. E. NÖRLUND, *Differenzenrechnung* (Berlino, 1924); C. H. RICHARDSON, *An introduction to the calculus of finite Differences* (New York, 1954); P. M. BATCHELDER, *An introduction to linear difference Equations* (Harvard, 1950); S. GOLDBERG, *Introduction to difference Equations* (New York, 1958); H. LEVY & F. LESSMAN, *Finite difference Equations* (Londra, 1959).

Con il simbolo E ora introdotto, la (1) può essere scritta nella forma

$$(3) \quad \Delta y_n = E y_n - y_n.$$

Una immediata generalizzazione porta a considerare la operazione identica, che fa corrispondere all'elemento y_n l'elemento stesso e ad attribuire ad essa il simbolo I , ponendo quindi

$$(4) \quad y_n = I \cdot y_n;$$

possiamo ora convenire di operare sul secondo membro della (3) *come se* si potesse raccogliere a fattor comune y_n , convenendo di scrivere

$$(5) \quad E y_n - y_n = (E - I) y_n$$

ed ottenendo così la relazione fondamentale tra operatori

$$(6) \quad \Delta = E - I.$$

Abbiamo sottolineato che la espressione al secondo membro della (5) è strettamente convenzionale, così come è convenzionale il passaggio dalla (3) alla (6).

Osserviamo ora che qualunque sia la successione $\{y_n\}$, si ha sempre

$$y_{n+1} = y_n + (y_{n+1} - y_n)$$

e quindi, con le notazioni che abbiamo introdotte

$$E y_n = I \cdot y_n + \Delta y_n;$$

quindi, operando con convenzioni analoghe a quelle che abbiamo seguito nel passare dalla (3) alla (6) potremo scrivere

$$E y_n = (I + \Delta) y_n$$

ossia otterremo ancora la relazione formale tra operatori

$$(7) \quad E = I + \Delta.$$

Si noti ora che questa formula, da noi stabilita in base alle proprietà degli operatori definiti, può apparire dedotta formalmente dalla (6) come se gli operatori E , Δ ed I fossero numeri e la operazione indicata con il segno «—» al secondo membro indicasse una differenza.

Questa analogia tra operazioni eseguite su numeri ed altre che si possono pensare eseguite sui simboli introdotti può essere portata più lontano, come vedremo, fino a stabilire un « calcolo » sugli operatori.

A tal fine si noti anzitutto che, come abbiamo osservato poco fa, il simbolo Δ si può considerare come un operatore che fa corrispondere ad una data successione $\{y_n\}$ una seconda successione, quella delle differenze prime; ovviamente nulla impedisce di applicare l'operatore Δ anche a questa seconda successione, ottenendo così la successione delle « differenze seconde »; quest'ultima si può considerare ottenuta dalla successione originaria $\{y_n\}$ mediante un operatore che potremo indicare con il simbolo Δ^2 , ponendo quindi

$$\Delta(\Delta y_n) = \Delta^2 y_n.$$

Il procedimento seguito fin qui suggerisce una immediata generalizzazione, e porta quindi a definire per induzione una « potenza » (ad esponente intero positivo) dell'operatore Δ , ponendo

$$\Delta(\Delta^k y_n) = \Delta^{k+1} y_n,$$

e definendo quindi, simbolicamente

$$\Delta \Delta^k = \Delta^{k+1}.$$

Di qui, per induzione, si giunge immediatamente a giustificare la legge formale delle potenze

$$(8) \quad \Delta^k \Delta^h = \Delta^h \Delta^k = \Delta^{h+k},$$

Analogamente si può dare senso alla potenza ad esponente intero e positivo dell'operatore E , ponendo come è del tutto naturale

$$E^k y_n = y_{n+k};$$

da questa definizione si trae immediatamente la legge analoga alla (8) e valida per l'operatore E

$$E^k E^h = E^h E^k = E^{h+k}$$

essendo h e k due qualunque interi positivi.

Infine è chiaro che per l'operatore I vale la legge formale

$$I^k = I$$

qualunque sia l'intero positivo k .

Lasciamo al Lettore di verificare che l'operatore I è permutabile con qualunque potenza, tanto dell'operatore Δ che dell'operatore E , avendosi quindi

$$I\Delta^k = \Delta^k I = \Delta^k; \quad I \cdot E^k = E^k I = E^k.$$

Poniamo ora, come è del tutto naturale

$$\Delta^0 = E^0 = I$$

ed osserviamo che, qualunque sia la costante a si ha

$$\Delta(ay_y) = a(\Delta y_n); \quad E(ay_n) = a(Ey_n);$$

si trae di qui la possibilità di definire, in modo ovvio, gli operatori $a\Delta$ ed aE .

Siamo quindi in grado di definire un operatore che sia espresso *formalmente* come un polinomio a coefficienti reali nei simboli Δ ed E .

L'osservazione che abbiamo fatto or ora, porta immediatamente a ricercare la espressione della potenza ad esponente intero qualunque di uno tra gli operatori in funzione degli altri. Il risultato che si ottiene, sotto certi aspetti notevole, è quello di poter applicare alle formole (6) e (7) la notissima « formula del binomio di Newton » *come se* i secondi membri delle formole

stesse rappresentassero somme o differenze di numeri; si ha infatti

$$(9) \quad E^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^i$$

$$(10) \quad \Delta^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} E^i.$$

Le formule (9) e (10) possono essere facilmente dimostrate per induzione; per es. per quanto riguarda la (9) si ha

$$E^{k+1} = E \cdot E^k = (1 + \Delta)E^k = E + \Delta E^k$$

e tenendo conto della (9) supposta vera per k

$$\begin{aligned} E^{k+1} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^i + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^{i+1} = \\ &= 1 + \sum_{j=0}^k \Delta^j \left\{ \binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} \right\} + \Delta^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \Delta^j. \end{aligned}$$

Analoga dimostrazione si può dare facilmente per la (10).

3. - Abbiamo visto nel precedente § il concetto di «differenze finite» e le proprietà formali dei simboli Δ ed E , proprietà che ci hanno fornito degli esempi interessanti di come certe operazioni (per es. somma, potenza ad esponente intero, e prodotto per un numero) possano essere definite anche per enti che non sono numeri ed avere molte delle proprietà che loro appartengono quando siano applicate ai numeri.

Vogliamo qui passare brevemente in rassegna altre proprietà che accostano il simbolo Δ al simbolo $\frac{d}{dx}$ del calcolo differenziale; si noti anzitutto che, come abbiamo osservato, il simbolo Δ si può interpretare come l'indicazione di una operazione che fa passare da una data successione $\{y_n\}$ a quella delle differenze prime; e ciò in analogia al simbolo $\frac{d}{dx}$ il quale si può interpretare come l'indicazione di una operazione che, applicata ad una

funzione derivabile $f(x)$ conduce ad una seconda funzione, la sua derivata prima.

L'analogia può essere spinta molto più oltre; si consideri una coppia di successioni $\{y_n\}$ e $\{z_n\}$ e si considerino le due successioni s_n e d_n , i cui elementi sono dati da

$$s_n = y_n + z_n$$

$$d_n = y_n - z_n$$

(abituamente le due successioni $\{s_n\}$ e $\{d_n\}$ sono indicate come « successione somma » e rispettivamente « successione differenza » delle due date).

Si ha allora immediatamente che l'operatore Δ è, come suol dirsi, « distributivo » rispetto alla somma ed alla differenza. Si ha cioè, come si verifica facilmente

$$(11) \quad \begin{aligned} \Delta s_n &= \Delta y_n + \Delta z_n \\ \Delta d_n &= \Delta y_n - \Delta z_n. \end{aligned}$$

Come si verifica facilmente, la proprietà espressa dalla (11) si estende subito ad una successione i cui elementi si costruiscono sommando gli elementi di posto corrispondente di un numero finito di successioni date.

Si considerino poi le successioni $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$, definite dalle relazioni

$$p_n = y_n \cdot z_n$$

e rispettivamente, supposto che sia, per ogni valore di n

$$z_n \neq 0$$

$$q_n = y_n / z_n.$$

Applicando l'operatore Δ alle successioni $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ sopra definite, si ha, come si verifica subito,

$$\Delta p_n = \Delta(y_n z_n) = y_{n+1} \Delta z_n + z_n \Delta y_n = z_{n+1} \Delta y_n + y_n \Delta z_n$$

ed anche

$$\Delta q_n = \Delta(y_n / z_n) = (z_n \Delta y_n - y_n \Delta z_n) / z_n z_{n+1}.$$

Il Lettore non avrà difficoltà a riconoscere la analogia formale tra le formule che abbiamo or ora dedotte e le proprietà formali della operazione di derivazione del calcolo differenziale.

Una ulteriore analogia può essere riconosciuta quando si osservi che per una successione costante, tale cioè che sia, per ogni n

$$y_n = k \text{ (cost.)}$$

si ha evidentemente

$$\Delta k = 0.$$

Infine altre e (sotto un certo aspetto) più interessanti analogie fra l'operazione indicata con il simbolo Δ e l'operazione di derivazione del calcolo differenziale si presentano quando si ponga il problema di determinare una successione che soddisfi a certe condizioni date.

In questo ordine di idee invero si pone spesso il problema di determinare una successione quando sia data una equazione che lega in determinato modo certi termini successivi della successione cercata.

Supponendo che la equazione leghi tra loro $(k + 1)$ termini successivi $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}$ della successione, essa avrà la forma

$$(12) \quad f(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}, n) = 0.$$

In base alle formule dimostrate nel § precedente è

$$y_{n+i} = E^i y_n = (1 + \Delta)^i y_n$$

e quindi la equazione (12) può essere scritta facendo intervenire le differenze k -esime; pertanto essa viene chiamata « equazione alle differenze finite di ordine k ». Inversamente è chiaro che ogni equazione che leghi (oltre all'elemento generico y_n) le differenze successive fino all'ordine k può sempre essere scritta come una equazione che lega $(k + 1)$ termini consecutivi della successione cercata.

Pertanto, supponendo valide le ipotesi sotto le quali la equazione (12) può essere esplicitamente risolta rispetto all'argomento y_{n+k} , la equazione alle differenze finite di ordine k si

può pensare scritta nella forma canonica

$$(13) \quad y_{n+k} = \varphi(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}, n).$$

A seconda della forma che ha la funzione f che compare nella (12) oppure la funzione φ che compare nella (13), le equazioni alle differenze finite sono classificate in varie classi, che vengono distinte con aggettivi analoghi a quelli che distinguono le equazioni differenziali.

Nei prossimi paragrafi tratteremo di alcuni casi di equazioni alle differenze finite che ci sembrano notevoli perchè appaiono particolarmente adeguate a rispecchiare certi fenomeni della Natura o della vita sociale, ed insieme offrono il destro per l'applicazione delle convenzioni della Geometria analitica alla discussione ed alla determinazione qualitativa del comportamento delle soluzioni.

Prima di iniziare la breve esposizione tuttavia vogliamo richiamare la osservazione del tutto ovvia, che non esiste fenomeno naturale che sia reso in tutta la sua totalità da un algoritmo matematico. Basti invero pensare che ogni misura concreta od ogni osservazione è inevitabilmente affetta da errore e che quindi tali errori si riflettono tanto sui dati da cui si parte nel determinare le costanti ed i parametri che compaiono nelle equazioni quanto sulle misure che si eseguono per verificare le ipotesi espresse con esperimenti o con osservazioni. Si ricordi infine che molto spesso quando si emette una « legge » si conviene, più o meno tacitamente, di prendere in considerazione soltanto alcuni aspetti del fenomeno che si vuole rappresentare, aspetti che ad una stima necessariamente approssimata e grossolana, appaiono come rilevanti, rispetto ad altri che si trascurano e che vengono considerati come « trascurabili » o come « perturbazioni » del fenomeno principale.

Queste ed altre circostanze su cui ci soffermeremo tra poco fanno sì che non si possa parlare di legge « vera » o di legge « falsa » ma di leggi più o meno adeguate per la rappresentazione di certi fenomeni.

Molto spesso per es. vengono usati i mezzi della Analisi matematica classica (funzioni continue, derivate, equazioni differenziali) per rendere certi fenomeni che appaiono più adeguatamente rappresentabili mediante i mezzi forniti da una analisi

discontinua. Per es. quando si applica la Matematica alla rappresentazione di fenomeni della Finanza non si può non osservare che per tali fenomeni esiste per la misura del tempo una unità minima (il giorno) al disotto della quale non ha senso scendere, così come esiste una unità di misura delle grandezze (la lira nel caso della moneta italiana) di cui non esistono sottomultipli.

Analoghe considerazioni si possono fare quando si applichino gli schemi forniti dalla Matematica allo studio dei fenomeni della Natura; classico è l'esempio della applicazione della Matematica alla evoluzione delle specie viventi.

In questi ed in altri fenomeni spesso si presenta più adeguato, invece dello schema delle equazioni differenziali, lo schema delle equazioni alle differenze finite; invero esso permette di mettere esplicitamente in evidenza il fatto che il fenomeno che si considera riguarda certe grandezze di cui ha senso considerare i valori soltanto in corrispondenza a valori della variabile indipendente che formano un insieme discontinuo e numerabile; per es. quando tale variabile indipendente è interpretata come « tempo » ha senso misurare la grandezza che si considera soltanto ad intervalli ben determinati, per es. ad anni successivi se si tratta di specie viventi nel loro « habitat » naturale, oppure a scadenze fisse se si tratta di scorte di una industria o di un processo produttivo in generale.

Osserviamo infine in linea preliminare che la ricerca della soluzione di una equazione alle differenze finite, in analogia a quanto avviene per la ricerca della soluzione di una equazione differenziale dell'Analisi, non dà luogo ad una *unica* successione; analogamente a quanto avviene per la soluzione di una equazione differenziale, anche per una equazione alle differenze finite la soluzione è data da una intera classe di successioni, dipendenti da tante costanti arbitrarie quante sono le unità dell'ordine della equazione stessa.

La cosa appare del tutto evidente quando si consideri la forma (13) in cui si presenta la equazione.

Invero, scelte certe k costanti arbitrarie c_i ($i=1, 2, \dots, k$), fatto nella (13) $n=1$ e ponendo $y_i=c_i$ è possibile in base alla (13) stessa calcolare y_{k+1} ; analogamente si ha la possibilità di calcolare successivamente y_{k+2} facendo nella (13) $n=2$ e ponendo nel secondo membro $y_i=c_i$ per $i=2, 3, \dots, k$ e sosti-

tuendo per y_{k+1} il valore testè calcolato. Si ha così il modo di calcolare un termine qualsivoglia della successione.

Questo procedimento può essere considerato come risolutivo della equazione dal punto di vista del calcolo effettivo dei termini della successione; esso lascia tuttavia molto spesso insoluto il problema della ricerca del limite di questa e della discussione delle condizioni che permettono di dedurre la esistenza o meno del limite a partire dalla forma della equazione ed eventualmente dalle costanti scelte.

Vale quindi la pena di spingere ulteriormente la analisi di qualche tipo di equazione che appare particolarmente notevole, per dare qualche esempio dei procedimenti che si possono seguire per poter dedurre dalla forma della equazione le proprietà della famiglia di successioni che essa definisce.

Gli esempi che esporremo nei prossimi paragrafi sono stati scelti soprattutto tenendo presenti le applicazioni ad argomenti che non formano oggetto abituale di considerazione, oppure che offrono spunti per illustrazioni che appaiono particolarmente significative.

4. - Il tipo più semplice di equazione alle differenze finite è quello della equazione del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti; tenendo presente la forma canonica (13) una equazione cosiffatta può essere scritta nella forma

$$(14) \quad x_{n+1} = px_n + q$$

essendo p e q due costanti.

Il caso particolare in cui nella (14) si ha

$$(15) \quad q = 0$$

conduce alla nota « successione geometrica » il cui termine n -esimo è dato da

$$(16) \quad x_n = x_1 p^{n-1}$$

essendo x_1 una costante arbitraria.

Non stiamo a dare qui la discussione del comportamento della successione (16) per $n \rightarrow \infty$; piuttosto preferiamo ricordare che nello schema di questo caso molto particolare rientra un fenomeno considerato come elementare e fondamentale in Matematica finanziaria: si tratta del « regime di capitalizzazione composta », che obbedisce alla equazione alle differenze finite del primo ordine

$$x_{n+1} = (1 + i)x_n$$

dove i è una costante, che di solito soddisfa alle limitazioni

$$0 < i \leq 0, 1$$

e che viene chiamato « tasso di capitalizzazione composta » ed essendo x_n il « montante » di un determinato capitale allo scadere del n -esimo periodo elementare di tempo a cui si riferisce il tasso i (per es. se il periodo elementare considerato è l'anno, il tasso i di capitalizzazione è relativo all'anno e viene anche chiamato « tasso annuo di capitalizzazione »).

Se non è valida la condizione (15) si ha facilmente dalla (14)

$$(17) \quad x_n = x_1 p^{n-1} + q \sum_{j=0}^{n-2} p^j.$$

Se è $p=1$ la successione data dalla (17) è semplicemente la nota « successione aritmetica » di differenza q ; se è $p \neq 1$ dalla (17) si trae

$$(18) \quad x_n = x_1 p^{n-1} + q(1 - p^{n-1})/(1 - p).$$

La discussione della (18) può essere fatta ricalcando le considerazioni abituali della Analisi: si distinguono due casi: a) è $|p| < 1$ oppure b) è $|p| > 1$.

Nel primo caso è ovviamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p^n| = 0$$

e quindi si ha

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q: (1 - p).$$

Nel secondo caso si ha invece che il valore assoluto di x_n tende all'infinito insieme con n . È interessante osservare, come si desuma dalla (19) che il limite a cui tende ognuna delle successioni definite dalla (18) stessa non dipende dal valore iniziale x_1 fissato, ma soltanto dai coefficienti della equazione (14).

La discussione che abbiamo qui svolta può essere resa più evidente in forma grafica col seguente procedimento: si fissi in un piano un sistema cartesiano ortogonale di coordinate x , y e si osservi che la equazione (14) si può considerare ottenuta dalla eliminazione di y_n tra le due equazioni

$$\begin{cases} (20) & y_n = px_n + q \\ (21) & y_n = x_{n+1}; \end{cases}$$

allora la determinazione del termine n -esimo della successione definita dalla equazione e dal valore iniziale x_1 scelto può essere illustrata come segue: fissato il valore x_1 , ad esso corrisponde un punto P_1 che sta sulla retta rappresentata dalla equazione (20) e quindi ha come ascissa x_1 e come ordinata $px_1 + q$; a questo punto corrisponde un punto Q_2 che ha la stessa ordinata di P_1 e sta sulla retta rappresentata dalla equazione (21); questo punto Q_2 ha dunque una ascissa x_2 che è data dalla (21) (è uguale

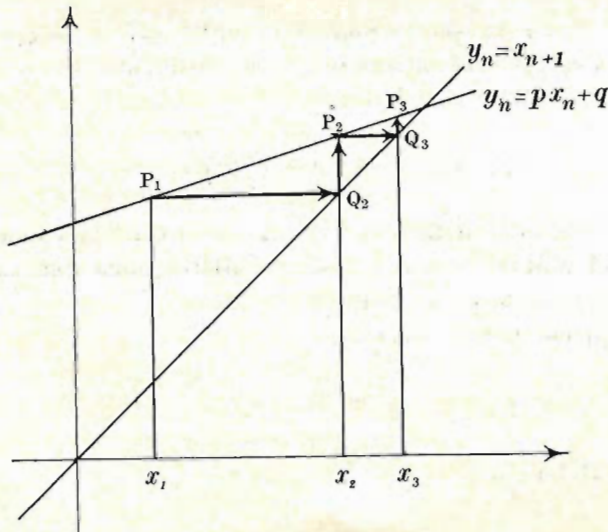


Fig. 1

alla ordinata) e che è pure ascissa di un punto P_2 che appartiene alla retta rappresentata dalla (20); a questo corrisponde un nuovo punto Q_3 e così via.

La illustrazione fornita dalla annessa figura 1 rende evidente il fatto che, nel caso in cui si abbia

$$(22) \quad 0 < p < 1; \quad q > 0$$

la successione dei punti P_j tende al punto di intersezione delle due rette, rappresentate dalle equazioni

$$(23) \quad y = px + q; \quad y = x$$

che si ottengono dalle (20) e (21) ponendo $x_i = x$, $y_j = y$, e ciò qualunque sia il punto P_1 ; di conseguenza la successione $\{x_j\}$ delle ascisse dei punti P_j tende alla ascissa

$$\alpha = q/(1 - p)$$

del punto comune alle due rette (23), qualunque sia l'ascissa iniziale x_1 che è stata scelta. Tale successione è crescente o decrescente a seconda che si abbia, rispettivamente

$$x_1 < \alpha \text{ oppure } x_1 > \alpha.$$

In particolare per $x_1 = 0$ il procedimento suddetto fornisce la illustrazione del procedimento di sommazione della serie geometrica la cui ragione p soddisfa alla prima tra le limitazioni (22).

Analogia illustrazione serve nel caso in cui si abbia

$$(24) \quad 0 > p > -1 \quad q > 0;$$

in questo caso la successione dei punti P_j e delle corrispondenti ascisse x_j è tale che le ascisse aventi indice pari (o dispari) sono tutte minori di α , mentre le ascisse di indice dispari (o rispettivamente pari) sono tutte maggiori di α . Il grafico assume di conseguenza un aspetto che con espressione molto calzante è stato definito « a ragnatela » dagli economisti che hanno utilizzato questa teoria nello studio delle variazioni cicliche

dei sistemi economici («Cobweb cycles»). La annessa fig. 2 illustra il caso ora considerato e non ha bisogno di ulteriori illustrazioni.

Un analogo procedimento grafico permette di mettere in evidenza il fatto che se valgono le relazioni

$$-1 > p; q > 0$$

non esiste limite finito per la successione definita dalla equazione (14). (Si veda la fig. 3).

Prima di lasciare l'argomento, intendiamo soffermarci brevemente su alcune applicazioni di queste teorie alla analisi dei fenomeni economici.

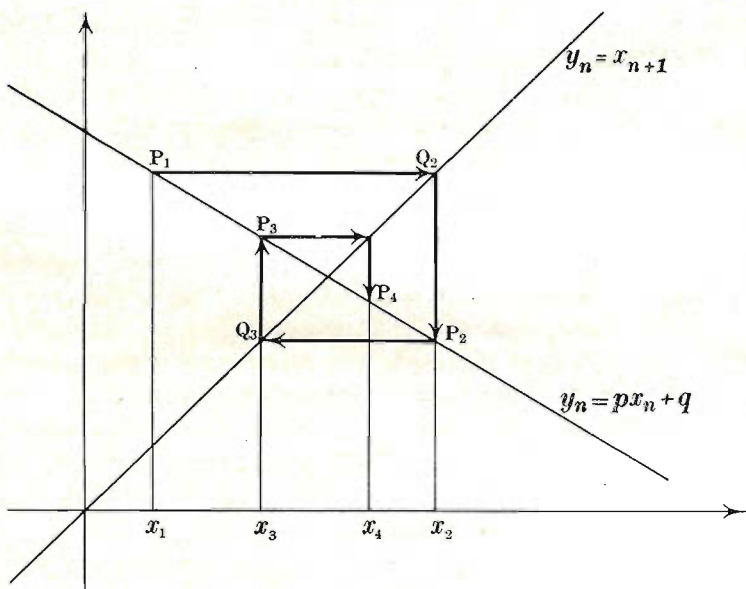


Fig. 2

La più tipica di queste applicazioni si ha nell'analisi della formazione del prezzo di una determinata merce in un sistema economico chiuso.

A tal fine consideriamo un sistema economico isolato ed indichiamo con y_n il prezzo (medio) di un determinato bene in un determinato periodo di osservazione e con x_n la quantità dello stesso bene prodotta nello stesso periodo. Supponiamo

che la quantità della merce prodotta in un periodo sia funzione crescente del prezzo medio che la merce ha avuto sul mercato nel periodo precedente, per es. sia direttamente proporzionale ad esso. Questa ipotesi è abbastanza adeguata a rendere la realtà quando si tratti di produzioni che richiedono un periodo abbastanza rilevante per la impostazione e la realizzazione del processo produttivo; per es. si immagini che la merce in questione sia un prodotto agricolo e che il produttore decida l'area da destinare alla produzione in un anno assumendola direttamente proporzionale al prezzo che il prodotto ha avuto sul mercato nell'anno precedente.

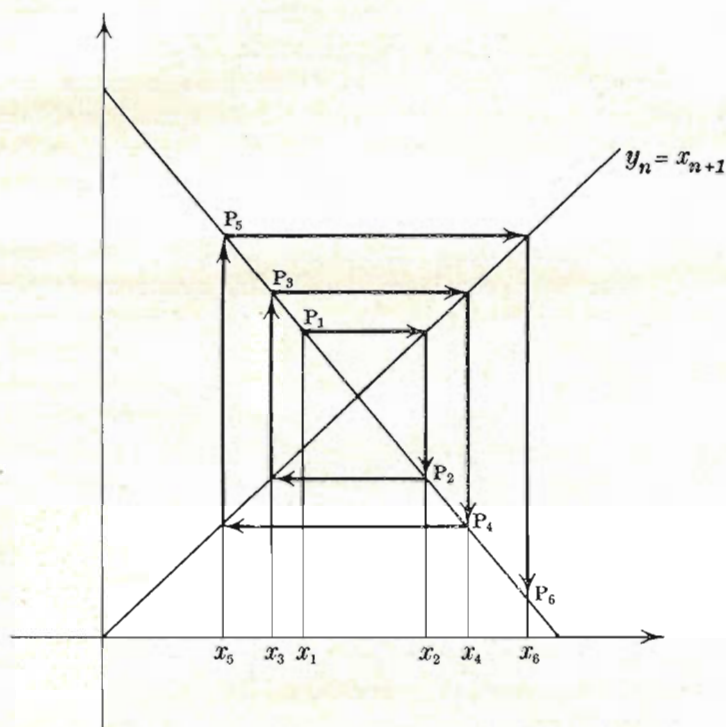


Fig. 3

Possiamo inoltre pensare che in un determinato periodo il prezzo del bene economico in questione sia una funzione della quantità messa sul mercato; supponendo che non esistano importazioni del bene considerato e che tutta la quantità prodotta sia assorbita dal mercato, il fenomeno potrà essere schema-

tizzato con il seguente sistema di equazioni

$$(25) \quad x_{n+1} = f(y_n)$$

$$(26) \quad y_n = \varphi(x_n) ;$$

ovviamente la funzione $f(y)$ è una funzione crescente del suo argomento, perchè si presume che il comportamento dei produttori sia tale che la produzione messa sul mercato in un periodo determinato sia funzione crescente del prezzo medio che il bene ha avuto nel periodo precedente; invece la funzione $\varphi(x)$ è ovviamente funzione decrescente, perchè si suppone pure che la quantità assorbita dal mercato diminuisca al crescere del prezzo del bene. La curva rappresentata dalla equazione (25) viene chiamata da alcuni « curva di offerta » o anche « curva di produzione »; la curva rappresentata dalla equazione (26) viene chiamata « curva di domanda »; entrambi i nomi non hanno bisogno di essere illustrati ulteriormente; va da sè inoltre che le curve stesse si suppongono appartenenti al primo quadrante⁽⁴⁾. Orbene il fenomeno della produzione e della formazione del prezzo del bene che si considera viene abitualmente trattato, nello schema considerato, mediante il seguente procedimento: supposto che nel periodo iniziale esista sul mercato la quantità x_1 del bene considerato, essa sarà assorbita dal mercato al prezzo $y_1 = \varphi(x_1)$, che è rappresentato dalla ordinata del punto P_1 . A tale prezzo del primo periodo, corrisponderà una quantità x_2 messa sul mercato nel secondo periodo; tale quantità risulta misurata dalla ascissa del punto Q_2 che appartiene alla curva di produzione; al punto Q_2 corrisponde un punto P_2 sulla curva di domanda, avente la stessa ascissa di Q_2 ; la ordinata y_2 del punto P_2 rappresenta il prezzo a cui viene assorbita la quantità x_2 ; tale prezzo corrisponderà ad una quantità x_3 messa sul mercato nel terzo periodo e così via.

Le quantità prodotte nei vari periodi soddisfano quindi alla equazione alle differenze

$$x_{n+1} = f[\varphi(x_n)] ;$$

(4) Si veda per es. O. LANGE, *Introduzione alla econometria* (Torino, 1963).

dalla illustrazione grafica (cfr. fig. 4) si può trarre facilmente la conclusione che se esiste una regione rettangolare, con i lati paralleli agli assi, che comprende nel suo interno il punto comune alle curve di offerta e di domanda, se nell'interno della regione il coefficiente angolare della curva di domanda è, in valore assoluto, minore del coefficiente angolare della curva di offerta, e se infine il punto P_1 appartiene alla regione stessa, il fenomeno si svolge in modo da tendere ad una situazione

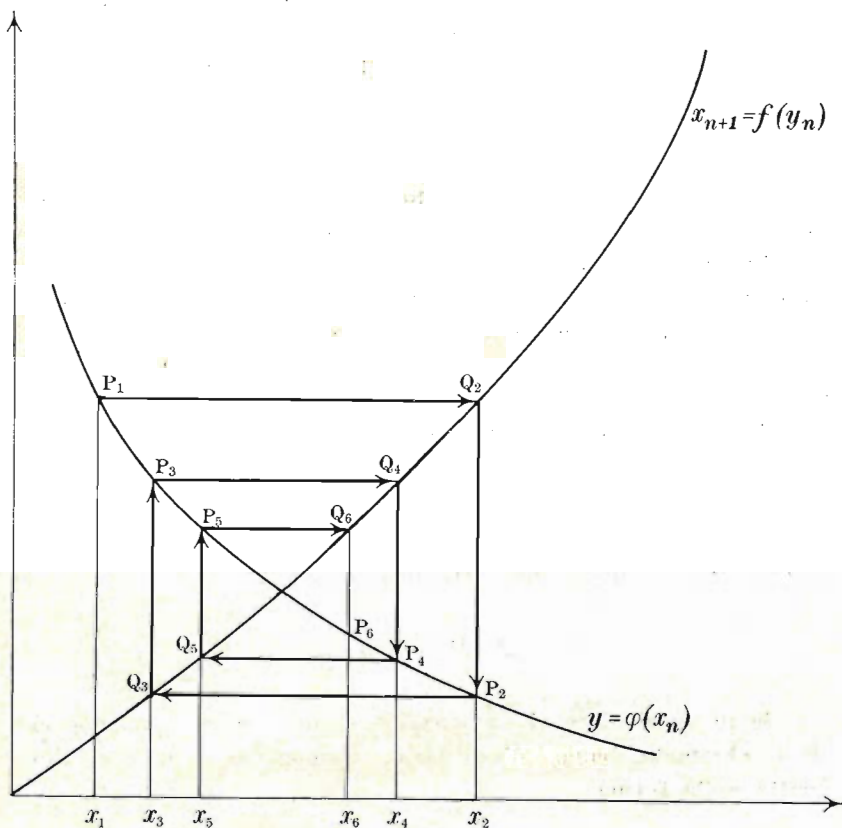


Fig. 4

limite, in cui la quantità prodotta e messa sul mercato e il suo prezzo sono rappresentati rispettivamente dalla ascissa e dalla ordinata del punto comune alle due curve, di offerta e di domanda; una situazione opposta si verifica se le condizioni

non sono soddisfatte: allora si può verificare una « situazione esplosiva » nella quale i prezzi e le quantità prodotte compiono oscillazioni sempre più ampie ed il sistema economico non tende ad una situazione limite.

Naturalmente i ragionamenti che abbiamo svolti sono validi soltanto nei limiti in cui sussistono le schematizzazioni da cui siamo partiti; abbiamo voluto tuttavia esporli qui per dare almeno un esempio di applicazioni dei metodi matematici fuori dei campi abitualmente citati e soprattutto per far vedere che sussiste la possibilità di eseguire la discussione, almeno qualitativa, della equazione alle differenze finite senza che sia necessario conoscere esplicitamente la forma analitica della soluzione ⁽⁵⁾.

5. - Faremo qui qualche breve cenno alle equazioni alle differenze finite del secondo ordine, perchè già in questo caso semplice si possono mettere in evidenza altre interessanti analogie con le equazioni differenziali; ci limiteremo inoltre a trattare il caso delle equazioni lineari a coefficienti costanti, perchè a questo tipo appartengono le equazioni che hanno le più notevoli applicazioni.

Una equazione cosiffatta può essere scritta nella forma

$$(27) \quad y_{n+2} + 2p y_{n+1} + q y_n = f(n)$$

ovvero, con le notazioni introdotte nel § 2

$$(E^2 + 2p E + q) y_n = f(n).$$

Se in particolare si ha $f(n) = 0$ si ottiene la equazione che viene chiamata, come d'ordinario, « omogenea », e che viene scritta nella forma

$$(28) \quad (E^2 + 2p E + q) y_n = 0.$$

⁽⁵⁾ Per altre discussioni condotte a termine con metodo prevalentemente grafico si veda in particolare l'opera di H. LEVY & F. LESSMAN citata in (3).

La risoluzione della equazione omogenea (28) viene ricondotta alla risoluzione della equazione algebrica

$$(29) \quad t^2 + 2p t + q = 0$$

che anche in questo caso viene chiamata « equazione caratteristica » della equazione differenziale (28).

Indichiamo con α_1 ed α_2 le radici della (29), supposte diverse tra loro; si verifica immediatamente che la successione il cui termine generale è dato dalla espressione

$$(30) \quad y_n = C_1 \alpha_1^n + C_2 \alpha_2^n$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti, soddisfa alla equazione (28). D'altra parte, posto nella (30) $n=1$ e successivamente $n=2$ è possibile scegliere C_1 e C_2 in modo che y_1 ed y_2 assumano due valori arbitrari prefissati; pertanto la (30) fornisce in questo caso la più generale soluzione della equazione (28). Se in particolare la (29) non ha radici distinte, indicata con α la (unica) radice della equazione, si verifica che la successione il cui termine generale è dato da

$$(31) \quad y_n = (C_1 + n C_2) \alpha^n$$

fornisce la più generale soluzione della equazione in questo caso.

Pertanto la discussione della equazione algebrica (29) fornisce tutte le informazioni necessarie per poter dedurre il comportamento delle soluzioni della equazione (28) quando n tende all'infinito.

Si ha immediatamente che, se le radici della equazione sono reali ed anche una sola tra esse ha modulo maggiore di 1, il valore assoluto di y_n tende all'infinito insieme con n . Se invece le radici della equazione (29) sono complesse coniugate, con un procedimento che si usa abitualmente anche nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, si possono assumere complesse coniugate anche le costanti C_1 e C_2 . A calcoli fatti la espressione (30) viene ad assumere in questo caso la forma

$$(32) \quad y_n = K \sqrt[2]{q^n} \cos [n\vartheta + H]$$

dove K ed H sono costanti e l'angolo ϑ è dato dalla formula

$$\tan \vartheta = - \sqrt{q - p^2}/p.$$

In questo caso, come si verifica facilmente, il valore assoluto di y_n tende a zero se si ha

$$q < 1.$$

Nel caso della « equazione completa », data dalla (27), il procedimento di soluzione è analogo a quello che si segue nel caso della equazione differenziale: la soluzione generale della equazione completa è data dalla somma della soluzione generale della corrispondente equazione omogenea (28) e di una soluzione particolare della equazione completa.

Illustreremo tutto questo su un esempio classico della teoria economica: il cosiddetto « problema delle scorte ».

Si consideri una industria che fabbrica un determinato bene economico e siano rispettivamente y_n la quantità prodotta del bene stesso nel periodo n -esimo in cui si eseguisce la osservazione, u_n la quantità del bene che è venduta nel periodo, s_n la scorta che rimane a magazzino dopo il periodo stesso e v una costante che può essere interpretata come « residuo » o come « scorta minima » del bene stesso. Ovviamente tra le quantità considerate sussiste la relazione

$$(33) \quad y_n = u_n + s_n + v;$$

si ha poi, per la definizione stessa di « scorta »

$$(34) \quad s_{n+1} = u_{n+1} - u_n;$$

si supponga poi che, almeno in media, il bene economico sia assorbito dal mercato in modo che la quantità venduta nel periodo n -esimo sia una percentuale costante della produzione dell'anno precedente; questa ipotesi è tradotta dalla relazione

$$(35) \quad u_{n+1} = \beta y_n$$

essendo β una costante che soddisfa alle limitazioni

$$(36) \quad 0 < \beta < 1.$$

Dalla (34), sostituendo per la (35) si ottiene

$$(37) \quad s_{n+2} = \beta(y_{n+1} - y_n)$$

e tenendo conto di questa e della (34) e sostituendo nella (33) si ottiene

$$y_{n+2} = \beta y_{n+1} + \beta(y_{n+1} - y_n) + v$$

ossia, in definitiva

$$(38) \quad y_{n+2} - 2\beta y_{n+1} + \beta y_n = v.$$

Si tratta di una equazione alle differenze finite a coefficienti costanti, completa.

In forza delle (36) si ha che le radici della corrispondente equazione caratteristica sono complesse coniugate. Dalle (32) si ottiene quindi come soluzione generale della equazione omogenea

$$(39) \quad y_n = K \sqrt{\beta^n} \cos(n\vartheta + H)$$

dove K ed H sono due costanti e ϑ è dato da

$$\tan \vartheta = \sqrt{(1 - \beta)/\beta}.$$

Con facili tentativi si trova poi, per la soluzione particolare della equazione completa la espressione

$$(40) \quad y^* = v/(1 - \beta).$$

Quindi la soluzione della equazione completa generale è data dalla somma delle espressioni (39) e (40); una immediata discussione, basata ancora una volta sulle limitazioni (36), conduce a concludere che, al tendere di n all'infinito, la produzione tende al valore limite dato dalla (40), eventualmente attraverso oscillazioni periodiche smorzate.

6. - Non vogliamo chiudere questo articolo senza accennare ad una breve digressione che può riallacciarsi alle considerazioni svolte fin qui e che esponiamo per accennare a qualche applicazione dei metodi della Geometria Analitica al calcolo numerico.

La digressione ci è suggerita dai grafici che abbiamo usato specialmente nel § 4 per la discussione delle equazioni alle differenze finite del primo ordine. Tali illustrazioni suggeriscono interessanti costruzioni di successioni che risolvono certi problemi di calcolo numerico e possono anche essere suggeriti come procedimenti sostitutivi di procedimenti classici per operazioni elementari.

Preferiamo trattare anzitutto un esempio elementare per dare più chiaramente l'idea di ciò che vogliamo esporre.

Sia data un'equazione di secondo grado che ammette due radici reali di segno opposto; in questa ipotesi il termine noto della equazione è negativo e pertanto (eventualmente con un semplice cambiamento di segno dell'incognita) la equazione può essere scritta nella forma

$$(41) \quad x + 2px = q$$

con le condizioni

$$(42) \quad p > 0, \quad q > 0.$$

Ovviamente la equazione (41) si può sempre ritenere ottenuta dalla eliminazione della variabile y tra le due equazioni

$$(43) \quad y = x; \quad y = q/(x + 2p)$$

e pertanto la risoluzione della (41) può essere interpretata geometricamente come la ricerca delle ascisse dei punti comuni ad una retta (la bisettrice del primo e terzo quadrante) e di una iperbole equilatera, avente come asintoti l'asse delle x e la retta di equazione

$$x = -2p.$$

Di particolare interesse appare il problema se lo si considera collegato con quello di ricercare la radice quadrata di un intero m ; invero in questo caso, indicando con p il massimo intero il cui quadrato è minore di m , tale cioè che sia

$$(44) \quad p^2 < m < (p + 1)^2$$

esisterà un intero q tale che sia

$$(45) \quad m = p^2 + q$$

essendo inoltre soddisfatta la condizione

$$(46) \quad q < 2p + 1.$$

In queste condizioni le formule risolutive della equazione di secondo grado mostrano che la ricerca della radice positiva α della equazione coincide praticamente con il calcolo della radice quadrata del numero m , avendosi

$$(47) \quad \sqrt{m} = p + \alpha.$$

La discussione fatta nel § 4 può essere applicata qui, perchè in base alle ipotesi si può garantire che il ciclo « a ragnatela » converge in questo caso: si ha infatti, per la funzione data dalla seconda delle (43)

$$y' = -q/(2p + x)^2$$

ed in forza delle (44) e (46) si può garantire che in questo caso è

$$|y'| < 1$$

per ogni valore positivo della x ; si potrà quindi costruire una successione $\{x_n\}$ di valori approssimati della radice α che soddisfa alla equazione

$$(48) \quad x_{n+1} = q/(2p + x_n).$$

La discussione sulla convergenza della successione definita dalla (48) può essere fatta in modo del tutto elementare in forma grafica. Si veda la fig. 5 che si riferisce al caso tipico in cui si ha

$$p = q = 1.$$

Si osservi anzitutto che, nella ipotesi che sia

$$x > 0$$

si ha che il polinomio

$$x^2 + 2p x - q$$

è minore oppure maggiore di zero a seconda che si abbia, rispettivamente

$$x < \alpha \text{ oppure } x > \alpha.$$

Consideriamo ora un valore qualunque x_n , appartenente alla successione $\{x_n\}$; dalla (48) si ha

$$x_{n+1} - x_n = (q - 2px_n - x_n^2)/(2p + x_n)$$

e pertanto segue di qui che x_{n+1} è maggiore oppure minore di x_n a seconda che quest'ultimo valore sia approssimato per difetto oppure per eccesso rispetto ad α ; in secondo luogo, in base alle ipotesi ed in forza della (48) si ha che x_{n+2} è minore oppure maggiore di x_{n+1} a seconda che x_{n+1} sia rispettivamente maggiore oppure minore di x_n ;

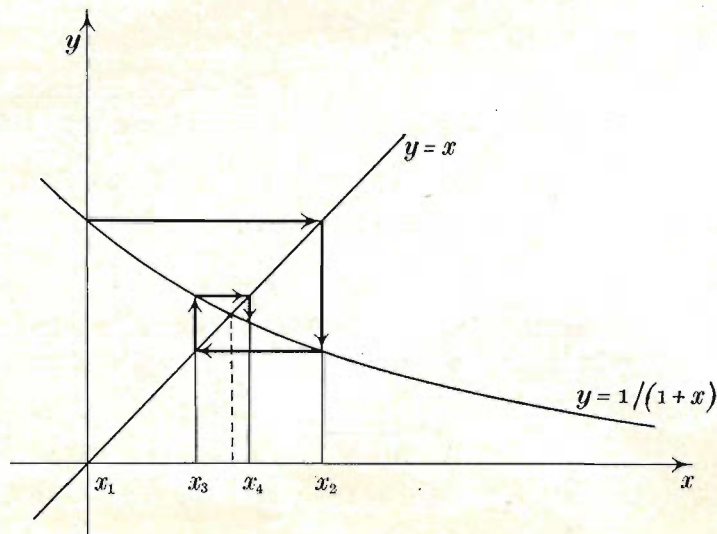


Fig. 5

Infine, sempre dalla (48) si ha

$$x_{n+2} = \frac{q}{2p + \frac{q}{2p + x_n}} = \frac{q(2p + x_n)}{4p^2 + 2px_n + q}$$

e quindi

$$x_{n+2} - x_n = 2p(q - 2px_n - x_n^2)/(4p^2 + 2px_n + q).$$

Queste brevi discussioni confermano ciò che è del resto già evidente in base alla rappresentazione grafica, che cioè se si assume come valore x_1 un valore approssimato per difetto di α tutti i valori calcolati in base alla (48) ed aventi indice dispari sono pure approssimati per difetto e formano una successione crescente, e tutti i valori aventi indice pari sono approssimati per eccesso e formano una successione decrescente; le formule che abbiamo dato permetterebbero facilmente di discutere l'ordine di grandezza dell'errore che si commette quando si usa il procedimento per ottenere dei valori approssimati della radice quadrata di un numero; tuttavia il fatto di avere ogni volta la possibilità di confrontare due valori, l'uno per difetto e l'altro per eccesso, permette ad ogni stadio di determinare l'errore.

A titolo di esempio riportiamo qui i valori ottenuti nel calcolo della radice positiva della equazione

$$x^2 + 10x = 10$$

mediante l'uso della successione definita dalla equazione

$$x_{n+1} = 10/(x_n + 10).$$

Ponendo

$$x_1 = 0,5$$

si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{ll} & x_2 = 0,996 \\ x_3 = 0,9094 & \\ & x_4 = 0,91664 \\ x_5 = 0,91603 & \\ & x_6 = 0,91608 \\ x_7 = 0,91607 \text{ (}^6\text{)}. & \end{array} \right.$$

(⁶) Abbiamo disposto su due colonne diverse i risultati aventi indice dispari e quelli aventi indice pari per mettere in evidenza il fatto che i primi formano una successione crescente, i secondi una successione decre-

Pertanto, dalle formule risolutive della equazione di secondo grado, oppure se si vuole dalla (47), si ha che i calcoli eseguiti portano alla determinazione di $\sqrt{35}$, dando

$$\sqrt{35} = 5,91607 \dots$$

per difetto, con un errore minore di 10^{-5} .

Abbiamo voluto dilungarci su questo esempio perchè ci sembra che esso, insieme con altri analoghi, possa fornire materiale utile, anche nelle scuole di ordine secondario, per l'uso dei metodi della Geometria analitica nella discussione e per fornire anche esempi di procedimenti « per iterazione », cioè procedimenti che conducono a costruire successioni definite da equazioni del tipo

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

La considerazione del procedimento per iterazione può dare occasione all'insegnante di osservare che, se il procedimento illustrato può apparire faticoso e lentamente convergente, è tuttavia concettualmente semplice, perchè richiede di eseguire sempre lo stesso calcolo ogni volta sul risultato del calcolo precedente; pertanto un procedimento cosiffatto risulta essere il procedimento tipo dove si possano eseguire in pochissimo tempo molte operazioni e dove d'altra parte abbia importanza la semplicità del procedimento stesso, semplicità che può essere misurata in qualche modo dalla « economia di istruzioni »; è chiaro quindi che il procedimento può essere assunto come tipico per il calcolo automatico; quindi l'operazione fatta può utilmente offrire spunti per introdurre commenti relativi ai nuovi procedimenti di calcolo.

D'altra parte è chiaro che la discussione precedente può essere applicata anche in altri casi, se pure ovviamente con le dovute restrizioni. Un caso che potrebbe essere oggetto anche di applicazioni elementari è quello che riguarda la approssima-

scante e che ogni valore dato dalla colonna di sinistra è minore di ogni valore che compare nella colonna di destra.

zione della radice positiva della equazione trinomia del tipo,

$$(49) \quad x^m + px = q$$

dove p e q soddisfano alle restrizioni (42) ed m è un intero positivo maggiore di 2. Anche in questo caso la equazione (49) si può ritenere ottenuta dalla eliminazione di y tra le due equazioni

$$(50) \quad y = x; \quad y = q/(p + x^{m-1});$$

il procedimento « a ragnatela » può essere applicato anche qui, purchè si arrivi a garantire di poter assumere come valore di partenza un valore appartenente ad un intorno della radice α in cui la derivata della funzione

$$(51) \quad \varphi(x) = q/(p + x^{m-1})$$

ha valore assoluto minore di 1; la discussione si fa in modo relativamente facile quando si osservi che dalla (51) si ha

$$(52) \quad \varphi'(x) = (1 - m)q x^{m-2}/(p + x^{m-1})^2.$$

In corrispondenza alla radice α positiva della equazione (19) si ha quindi

$$(53) \quad \varphi'(\alpha) = (1 - m) \alpha^m / q$$

e dalla continuità della derivata si può dedurre la esistenza di un intorno di α stesso nel quale il valore della derivata si discosta per meno di un ϵ prefissato dal valore dato dalla (53).

Pertanto non è escluso che, in base ad una previa discussione, anche grossolana, si possa garantire la esistenza di un intorno di α in cui la condizione è soddisfatta.

A titolo di esempio possiamo considerare la equazione cubica

$$(54) \quad x^3 + 4x = 3$$

che è caso particolare della (49) per

$$(55) \quad p = 4; \quad q = 3; \quad m = 3.$$

In questo caso una discussione immediata porta a concludere per la esistenza di una radice appartenente all'intervallo (0,1) ed un'altra discussione pure molto elementare permette di concludere che in tale intervallo la derivata $\varphi'(x)$ della funzione

$$\varphi(x) = 3/(4 + x^2)$$

ha valore assoluto minore di 1. Pertanto il procedimento « a ragnatela » converge in questo caso.

Partendo dal valore, grossolanamente errato

$$x_1 = 0$$

si ottengono con successivi passaggi i valori

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_2 = 0,75 & \\ x_3 = 0,657 & \\ x_4 = 0,6729 & \\ x_5 = 0,67357 & \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_2 = 0,75 \\ x_4 = 0,6769 \\ x_6 = 0,6737 \end{array}$$

Quest'ultimo valore si discosta di poco da quello che si ottiene con altri procedimenti che si potrebbero giudicare più faticosi (metodo di Hörner) e che danno

$$0,67359 < \alpha < 0,67360.$$

Non vogliamo concludere questa digressione dedicata alla illustrazione di procedimenti che possono servire anche al calcolo numerico senza ricordare anche altri procedimenti che conducono alla costruzione di valori approssimati di certe radici di equazioni algebriche e che possono essere illustrati con mezzi elementari: si tratta dei procedimenti che conducono al calcolo della radice quadrata di un numero (positivo) a mediante la successione

$$(56) \quad x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$$

ed in generale al calcolo della radice m -esima di a (con $m > 2$)

mediante la successione

$$(57) \quad x_{n+1} = \{x_n(m-1) + ax_n^{1-m}\}/m \text{ (}^6\text{)}.$$

Illustreremo il procedimento relativo alla successione (56), lasciando al Lettore la ovvia estensione al caso della successione (57).

Anche nel caso che ci interessa il calcolo della radice quadrata del numero a , cioè la risoluzione della equazione

$$x^2 = a$$

può essere interpretata come la ricerca del punto che sta nel primo quadrante ed è comune alla retta bisettrice di questo, di equazione

$$y = x$$

ed alla iperbole di equazione

$$(58) \quad y = \frac{1}{2} \left[x + \frac{a}{x} \right],$$

Una discussione molto facile porta anzitutto a concludere che, per valori di x positivi, il valore di y dato dalla (58) è maggiore di \sqrt{a} .

Assunto poi come valore x_1 un qualunque valore maggiore di \sqrt{a} si ha immediatamente che la (56) fornisce una successione decrescente che ammette come limite \sqrt{a} . Il procedimento è illustrato graficamente dalla annessa figura, che non ha bisogno di commenti, dopo quanto è stato detto ripetutamente; a titolo di esempio numerico si ha che, posto nella (56)

$$a = 35; \quad x_1 = 6$$

si ottiene con due soli passaggi

$$x_2 = 5,9166; \quad x_3 = 5,916079$$

cioè un valore approssimato a meno di 10^{-6} .

(7) Cfr. per es. F. B. HILDEBRAND, *Introduction to numerical analysis*. Mc Graw Hill, 1956. Devo la conoscenza del procedimento ad una segnalazione del prof. P. CANETTA.

In modo analogo quando si voglia applicare la (57) alla ricerca della $\sqrt[5]{10}$ si ha, facendo

$$a = 10, \quad m = 5$$

e prendendo $x_1 = 2$

$$x_2 = 1,725; \quad x_3 = 1,627; \quad x_4 = 1,587.$$

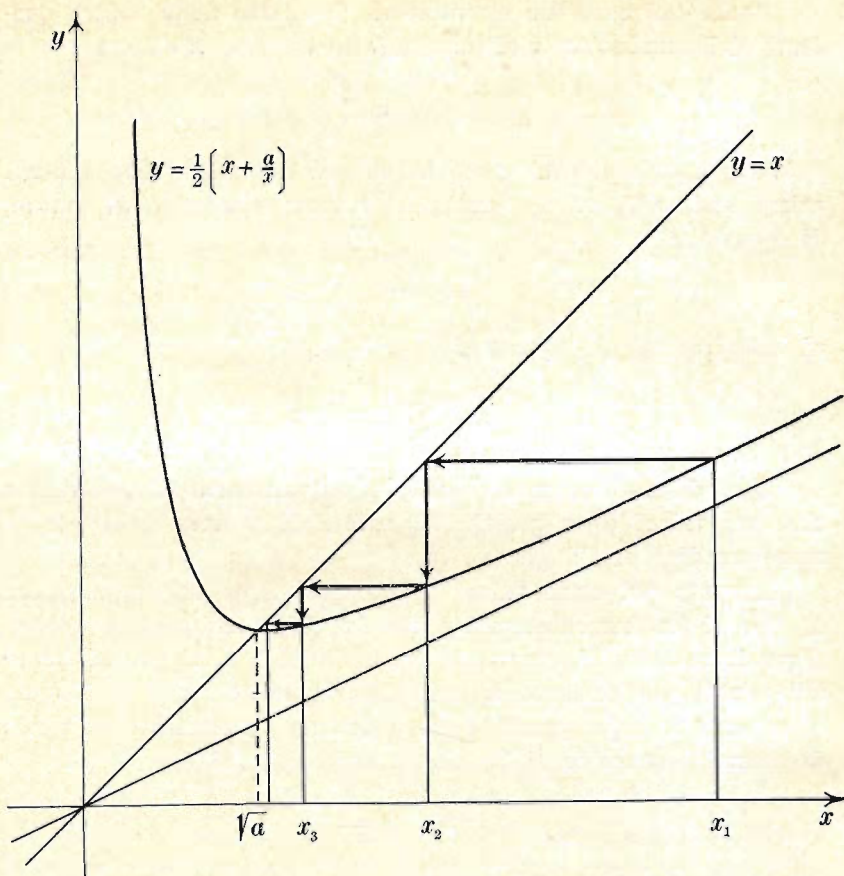


Fig. 6

Riteniamo che il materiale di esempio che abbiamo fin qui esposto possa bastare per offrire spunti di applicazione dei concetti e dei metodi della Matematica superiore a campi che hanno attinenza con la scuola dell'ordine secondario.

C. F. MANARA

OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE

AGOSTINELLI - <i>Istituzioni di fisica matematica</i> . Vol. I	7200
AGOSTINELLI e PIGNEDOLI - <i>Meccanica razionale</i> . Vol. I	6000
— — <i>Meccanica razionale</i> . Vol. II	4800
ALBERIGI-QUARANTA e RISPOLI - <i>Elettronica</i>	7200
<i>Atti del Congresso internazionale dei Matematici</i> (1928) 6 volumi. Ciascuno	1000
<i>Atti del primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana</i> , tenuto in Firenze nei giorni 1-2-3 Aprile 1937	3000
BELLUZZI - <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. I	6000
— — <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. II	6000
— — <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. III	7200
— — <i>Scienza delle costruzioni</i> . Vol. IV	4800
— — <i>Metodi semplici per lo studio delle lastre curve</i>	500
BOLCATO - <i>La chimica delle fermentazioni</i>	6000
BORDONI - <i>Fondamenti di fisica tecnica</i> . Vol. I	6000
CANNERI - <i>Nozioni di chimica analitica</i>	5000
CASTELNUOVO - <i>Calcolo delle probabilità</i> . Vol. I	2400
CHISINI - <i>Lezioni di geometria analitica e proiettiva</i>	4200
— — <i>Esercizi di geometria analitica e proiettiva</i>	2400
— — <i>Note e memorie di geometria</i> (selezione)	9600
COULSON - <i>La valenza</i>	3600
DE CASTRO - <i>Complementi di analisi matematica</i>	4800
DORE - <i>Fondamenti di fotogrammetria</i>	2400
ENRIQUES - <i>Le superficie algebriche</i> , con prefazione di G. Castelnuovo	3600
— — <i>Memorie scelte di geometria</i> . Volume I, 1893-1898	8000
— — <i>Memorie scelte di geometria</i> . Volume II, 1899-1910	8000
ENRIQUES e MAZZIOTTI - <i>Le dottrine di Democrito d'Abdera</i>	1500
EVANGELISTI - <i>La regolazione delle turbine idrauliche</i>	2600
FERRARO - <i>Piccolo dizionario di Metrologia generale</i> . Legato	3000
FERRI - <i>Guida dei principali prodotti chimici</i> . Vol. I	7000
Vol. II	8000
FILIPPI - <i>Resistenza dei materiali e applicazioni</i>	2500
FINZI - <i>Meccanica razionale</i> . Voll. I-II	8400
FINZI e PASTORI - <i>Calcolo tensoriale e applicazioni</i>	7200
FOÀ - <i>Fondamenti di termodinamica</i>	3600
FUBINI e ALBENGA - <i>La matematica dell'ingegnere e le sue applicazioni</i> . Vol. I	4800
Vol. II	7200
LELLI - <i>Bilancio energetico</i> . Legato	4000

ZANICHELLI - BOLOGNA

OPERE SCIENTIFICHE E TECNICHE

LEVI-CIVITA - <i>Opere matematiche - Memorie e note.</i>	
— — Volume I: 1893-1900	8000
— — Volume II: 1901-1907	9000
— — Volume III: 1908-1916	9000
— — Volume IV: 1917-1928	9000
LEVI-CIVITA e AMALDI - <i>Compendio di meccanica razionale.</i> Vol. I	2400
— — <i>Compendio di meccanica razionale.</i> Vol. II	2400
LEVI-CIVITA e AMALDI - <i>Lezioni di meccanica razionale:</i>	
Vol. I: <i>Cinematica - Principi e statica</i>	6000
Vol. II: <i>Dinamica dei sistemi con un numero finito di</i>	
<i>gradi di libertà</i> { Parte I	4800
Parte II	6000
MELLONI - <i>Opere.</i> Vol. I. Legato	5000
MONTAUTI - <i>Il telemetro monostatico</i>	2000
PERSICO - <i>Introduzione alla fisica matematica</i>	4800
— — <i>Gli atomi e la loro energia.</i> Legato	6600
RIGHI - <i>Scelta di scritti</i>	4000
RIMINI - <i>Elementi di elettrotecnica</i>	4800
— — <i>Fondamenti di radiotecnica generale</i>	5400
— — <i>Fondamenti di analisi matematica.</i> Vol. I	4800
— — <i>Fondamenti di analisi matematica.</i> Vol. II	7200
SANSONE - <i>Equazioni differenziali nel campo reale.</i> Parte I	4800
— — <i>Idem.</i> Parte II seconda edizione - Legato.	6000
<i>Scritti Matematici</i> , offerti a LUIGI BERZOLARI	2500
SUPINO E. - <i>Il disegno di macchine</i>	600
TORALDO DI FRANCIA - <i>Onde elettromagnetiche</i>	3600
TRICOMI - <i>Funzioni ellittiche</i>	5400
— — <i>Funzioni analitiche</i>	2000
VITALI-SANSONE - <i>Moderna teoria delle funzioni di variabile</i>	
<i>reale.</i> Parte I	3600
— — Parte II	8200
VOLTA - <i>Epistolario.</i> Edizione nazionale. Vol. I	5000
— — Volume II	5000
— — Volume III	5000
— — Volume IV	6000
— — Volume V	6000
ZAGAR - <i>Astronomia sferica e teorica</i>	2500

ZANICHELLI - BOLOGNA